機率統計入門

黃文璋

國立高雄大學統計學研究所

統計研習營
中央研究院統計科學研究所

106年7月5-7日

第三講

隨機法則

- 在隨機世界中，並非漫無章法，仍有一些隨機法則要遵循，如：

大數法則，

中央極限定理。

- 中央極限定理 ⇨ 常態分佈。
- 機率密度函數

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R,$$

及其圖形出現在德國10馬克。


GS1527893K8
DEUTSCHE BUNDESBANK
ZEHN DEUTSCHE MARK
10
GS1527893K8
Deutsche Bundesbank


DEUTSCHE BUNDE
10
f(x)

輸人不輸陣

- 民國95年後入學的高中生，高二下的數學，便有中央極限定理，及信賴區間。
- 99年後入學，中央極限定理及信賴區間，移至高三上。

◆高中為什麼要教中央極限定理？

因中央極限定理很重要？

- 為了近似，先介紹中央極限定理，且僅考慮最簡單的情況，即伯努力分佈，及相關的二項分佈。
- 以民調當應用，因引入民調裡的信賴區間，才是介紹中央極限定理之主要目的。
- 民調的取樣，為簡單隨機抽樣，即取出後不放回，故取出的樣本不獨立。此時涉及超幾何分佈(hype-rgeometric distribution)，而非二項分佈。要講清楚為什麼中央極限定理仍適用，不是那麼容易。
- 高中數學課本，寫到這裡，彆扭不產生也難。或不講原因，讓細心的學生充滿疑慮；或講得一團混亂，製造出更多困擾。

- 鈔票能用就好。
- 課本看不懂，就有點難過了。
- 有些師生在接觸信賴區間後，開始思索機率的涵義。

何謂機率？

例1. 抽屜中有橘子及蘋果各一，老師拿一個放背後。

問：是蘋果之機率為何？

例2. 投擲一公正的銅板，落地後蓋住。

問：正面朝上之機率為何？

有人以為上述二機率皆

不是1就是0。

在一篇題為機率或信心Q&A的文章

在某一次教師研習的綜合座談中，有老師提到以下的問題：

投擲1只骰子(傳統6面骰字，點數1, 2, 3, 4, 5, 6，點數1, 4為紅色，其他點數為黑色)，擲出1點的機率為何？若已知擲出的顏色為紅色，請問擲出1點的機率為何？

這個問題在學生沒有學過信賴區間與信心水準之前是沒有疑義的，還沒有擲出骰子前，擲出1點的機率是1/6；在擲出的顏色為紅色的條件下，擲出1點的機率為1/2。但學生學過信賴區間之後會說，不，老師，既然骰子已擲出，則骰子是1點的機率不是1就是0，不會是1/2或其他任何數字。

結果，學得越好的學生心中的疑惑卻越深。我們該如何回應這個學生？在條件機率的情境下，應該使用機率或信心？

Q&A作者如下回答：

擲一個公正骰子一次，出現一點的機率=1/6。這是由大數法則得到的，故以機率稱之。擲一個公正骰子一次，在已知出現紅色點數的條件下，出現一點的機率=1/2。這是由大數法則得到的，故仍以機率稱之。

- 大數法則，為機率中一重要定理。
- 學了信賴區間後，解中學的機率問題要用上大數法則？

- 何謂公正骰子？
- 公正一詞乃口語，其涵義為：

  骰子各面出現的機率相同，即皆1/6。
- 這是公正的涵義，與大數法則無關。
- 說是由大數法則得到，既非事實，且易讓人對機率生畏。

- Q&A作者說學得越好的學生心中的疑惑卻越深，不就是因常看到這些夾纏不清的講法所造成？

- 前述Q&A所提出的問題，最後有句：

  在條件機率的情境下，應該使用機率或信心？

- 依題意，在擲出骰子的顏色為紅色之條件下，擲出1點的機率就是1/2。

- 條件機率的情境下？信心？

令人更為困惑。

- 再來看：

  骰子已擲出，則骰子是1點的機率不是1就是0，不會是1/2或其他任何數字，

  此乃Q&A中所提學生的困擾。

- 欲解惑，歸根究柢：

  人們常在談機率，

  到底機率的意義是什麼？

隨機現象

- 隨機現象，可談機率。未知現象亦可。

  有人敲門，是男是女？

  答：男女機率各1/2。

- 敲門者的性別確定，但由於不知，對你而言，可能男可能女。男女約各半，在無其他資訊下，1/2的機率便產生了。

- 與Q&A中，已知擲出的顏色為紅色(點數有1,4二可能)，則擲出1點的機率為1/2，原理一樣。

- 聽到門外傳來高跟鞋的走路聲：

敲門者8成是女的。

此即條件機率，給定的條件是敲門者穿高跟鞋。

- 若有人的經驗是，男生也有不少穿高跟鞋者，則可能以為：

女生的機率為0.6。

- 對同一隨機現象，每個人認定的機率，可以很主觀：

主觀機率！

- 王建民下一場比賽贏的機率？

- 注意：

    一旦門打開，見到門外那人，

  則敲門者為女生的機率，不是1就是0。

- 若已看到女生(或男生)，還說女生的機率為0.8；或已假設骰子為公正，卻認為投擲一次後，會得到偶數的機率為0.7，便非在談機率。

類似例子

- 考試前一天仍可猜題，雖題目已出好。
- 比賽已結束。你仍可猜王建民贏了沒有？
- 賭新來的女老師有沒有男朋友？

幾種常見對機率的看法

- 一：

  骰子有6個面，基於相同的可能性(古典機率)，導致每個面出現的機率皆為1/6。

- 二：

  主觀的想法。覺得沒有道理那一面較易出現。

- 三：

  由過去多次投擲的經驗，觀察到骰子各面出現的相對頻率難分軒輊。

⋮

- 還有一種：

此為一假設

⇨ 以公理化的方式引進機率空間

- 若真有一骰子，則不論基於那一種看法，究竟是否可採信骰子各面出現的機率皆為1/6？

做一統計檢定。

- 在上述第三種看法裡，骰子各面出現的相對頻率，是否夠接近到足以視為相等？

藉助統計檢定來判定。

- 在第三種看法裡，某面出現的機率為1/6，導致多次投擲後，該面出現的相對頻率將很可能接近1/6，反之亦然，便用到大數法則。
- 要有隨機的概念，即使公正的骰子，不論投擲再多次，各面出現的相對頻率，都很難相等。
- 有些人以為投擲數夠多後，會使各面出現的相對頻率相等，此乃錯誤。

- 在隨機世界中，一切都是假設，看你接受那一個。
- 法庭宣判被起訴者無罪：

真無罪嗎？

- 骰子是否公正，不論投擲再多次，仍是天曉得。

假設檢定

- 統計檢定裡，依無罪推定的原則，及在給定所能容忍之犯錯機率下，有一套程序，以判定該接受或拒絕那一假設。
- 除非是退化的隨機現象(如銅板兩面皆為正)，否則不論證據再顯著(如投擲銅板100次都得正面)，其推論均可能犯錯。
- 僅能以較好的統計方法，減小犯錯機率。

數據愈完美愈好？

孟德爾實驗

孟德爾(G. J. Mondel, 1822-1884)將圓黃(round yellow)種子的豌豆，與縐綠(wrinkled green)種子的豌豆雜交。依其理論，會生長出圓黃、圓綠、縐黃及縐綠種子的後代之比率，應分別為

$$\frac{9}{16}=56.25\% \text{，} \frac{3}{16}=18.75\% \text{，}$$

$$\frac{3}{16}=18.75\% \text{，} \frac{1}{16}=6.25\% \text{。}$$

經由一組有556個樣本的實驗，得到下表。

	圓黃	圓綠	皺黃	皺綠	合計
後代數	315	108	101	32	556
觀測比率	56.65%	19.42%	18.17%	5.76%	100%
預期比率	56.25%	18.75%	18.75%	6.25%	100%

豌豆觀測到的後代比率，與預期比率有些差異。

經過卡方檢定(chi-squared test)，即使α值大到0.90，都無法拒絕

虛無假設：孟德爾的理論為正確。

是否毫無保留地接受孟德爾的理論？

- 此實驗結果與預期太吻合(fit too well)，曾引起費雪的懷疑：

  認為孟德爾可能重覆做實驗，直到結果看起來很好才停止，只公佈結果較好的那組數據。

- 對於隨機實驗，若結果與理論值過於一致，反而會讓人懷疑做假。

◆隨機地投擲一骰子600次，點數1,2,3,4,5,6各得100次。

你相信骰子公正，或並非隨機投擲？

- 某校辦理申請入學，結果男、女錄取率完全相同。該校宣稱：

審查時完全未考慮到性別。

- 你有何評論？

某版高中選修數學(I)，交叉分析之例。

例題 2

某大學熱門科系的入學方式分成「學校推薦」和「個人申請」兩種，去年度經由此兩方式提出入學許可者的審核結果雙向表如下：

	推薦	申請
錄取	24	36
不錄取	36	54

(1) 求錄取的學生中，推薦和申請者所占的比例.

(2) 求推薦錄取率，申請錄取率和總錄取率.

解：(1) 先求雙向表中各列與各行總和：

	推薦	申請	總和
錄取	24	36	60
不錄取	36	54	90
總和	60	90	150

所有錄取的 60 名學生中，

經由「推薦」入學者的比例為 $\frac{24}{60}=40\%.$

經由「申請」入學者的比例為 $\frac{36}{60}=60\%.$

(2) 推薦者的錄取率為 $\frac{24}{60}=40\%,$

申請者的錄取率為 $\frac{36}{90}=40\%,$

總錄取率 $\frac{60}{150}=40\%,$ 三者相同. ☒

在例題 2 第(1)小題中，所有錄取者中，由「推薦」而錄取者占 40%，「申請」而錄取者占 60%，是否可解讀為申請比推薦容易呢？這個錯覺是因為申請的人數比推薦的人數多所造成的．事實上，由第(2)小題得知，推薦與申請的錄取率都是 40%，我們合理的推測：「入學方式」和「通過與否」並沒有關聯.

雙向表的目的既是探討兩事件的關聯性是否存在，換成機率的語言就是兩事件是否獨立，上述的例子，在所有參加推薦和申請的學生中，設 A 表示參加推薦者，B 表示錄取者，則 $P(B \mid A)$ 表示推薦者的錄取率，而 $P(B)$ 表示總錄取率．在這個例子中，

$$P(B \mid A) = P(B).$$

即兩事件 A, B 為獨立事件．換句話說，在雙向表中，若某一列的各數據在其所在的行中所占比例皆相同，兩特性就沒有關聯．至於比例不相等時是否就代表有關聯呢？統計學上有更深入的檢定辦法，留待日後再學習之．

◆對隨機現象，人們平常理解誤差的存在。

99年4月19日，台大公布甄選榜單，報載醫學系20個名額中，有近半名額9位為女生，寫下歷史紀錄。台大教務長表示，女生錄取比例增加是剛好，台大招生的立場，向來就是找最適合、最有能力的學生，不會考慮學生性別。

◆只要近半，並不需女生錄取正好一半，才認定未考慮學生性別：

此講法正確否？

◆伯努力法則(Bernoulli law)：

獨立且重複地觀測一發生機率為p之事件A n次，出現$n(A)$次。當$n \to \infty$，$n(A)/n$接近p之機率，將趨近1。

機率趨近1？

◆$n(A)$有$B(n,p)$分佈。即

$$P(n(A)=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n。$$

伯努力(J. Bernoulli, 1655-1705)指出，當n很大時，$n(A)/n$與p之差距，應極可能很小。

- $n(A)$每回觀測都不盡相同。$n(A) = 0, 1, \cdots, n$。
- 投擲一公正銅板100次，100次全出現正面的機率很小，僅$1/2^{100}$。
- 重複執行此試驗(每回投擲100個銅板)2^{100}回，若出現一回100個全是正面，不用太奇怪。
- 如果做2^{110}回，平均可出現

$$2^{110}/2^{100} = 2^{10} = 1{,}024(\text{回})。$$

◆註1. 要完成2^{100}回投擲銅板100次並非易事。假設以電腦模擬，且1秒鐘可模擬1萬兆($=2^{16}$)回。1天有86,400秒，1年365天約有$3.1536 \cdot 10^7$秒。因此一年約可模擬$3.1536 \cdot 10^{23}$回。又

$$2^{100} \approx 1.2676506 \cdot 10^{30},$$

約要模擬$4.01969 \cdot 10^6$年。

◆野史裡偶有投擲出100個正面的記載，那些銅板當然都是特製的。

◆伯努力認為n很大時，$n(A)/n$與p之差，應極可能很小。即只要n夠大，

$$|n(A)/n - p| \le \varepsilon$$

之機率應很大，$\forall \varepsilon > 0$。

$$\sum_{|k/n-p|\le\varepsilon} P(n(A)=k) = \sum_{|k/n-p|\le\varepsilon} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 。$$

伯努力證明$n \to \infty$時，上式右側和趨近至1。

◆後人利用柴比雪夫不等式(Chebyshev inequality)，可輕易地證出比伯努力更一般的結果。

- 大數法則可支持頻率對機率的解釋。
- 設有一銅板，出現正面的機率為p，只投擲一次，無法感受p的意義。
- 投擲數夠大，銅板出現正面的相對頻率，就很可能會接近p了。1928年，俄國機率學家辛欽(K. Khinchin, 1894-1959)，證明對iid的隨機變數，只要期望值存在，大數法則便成立。
- 即對$n = 1, 2, \cdots$，設$X_1, \cdots, X_n$為i.i.d.，且$E(X_1)$存在，則

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} E(X_1)$$

- 期望值若不存在，大數法則就不適用了。
- 圖1給出當X_n, n=1, 2,⋯，為i.i.d.且以Ber(1/2)為共同分佈，$\overline{X}_n$之一模擬圖形，$n = 1, 2, \cdots, 1{,}000$。
- 對C(2.5,1)分佈，即機率密度函數為

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-2.5)^2)},\ x \in R,$$

圖2給出 $\overline{X}_n$之一模擬圖形。

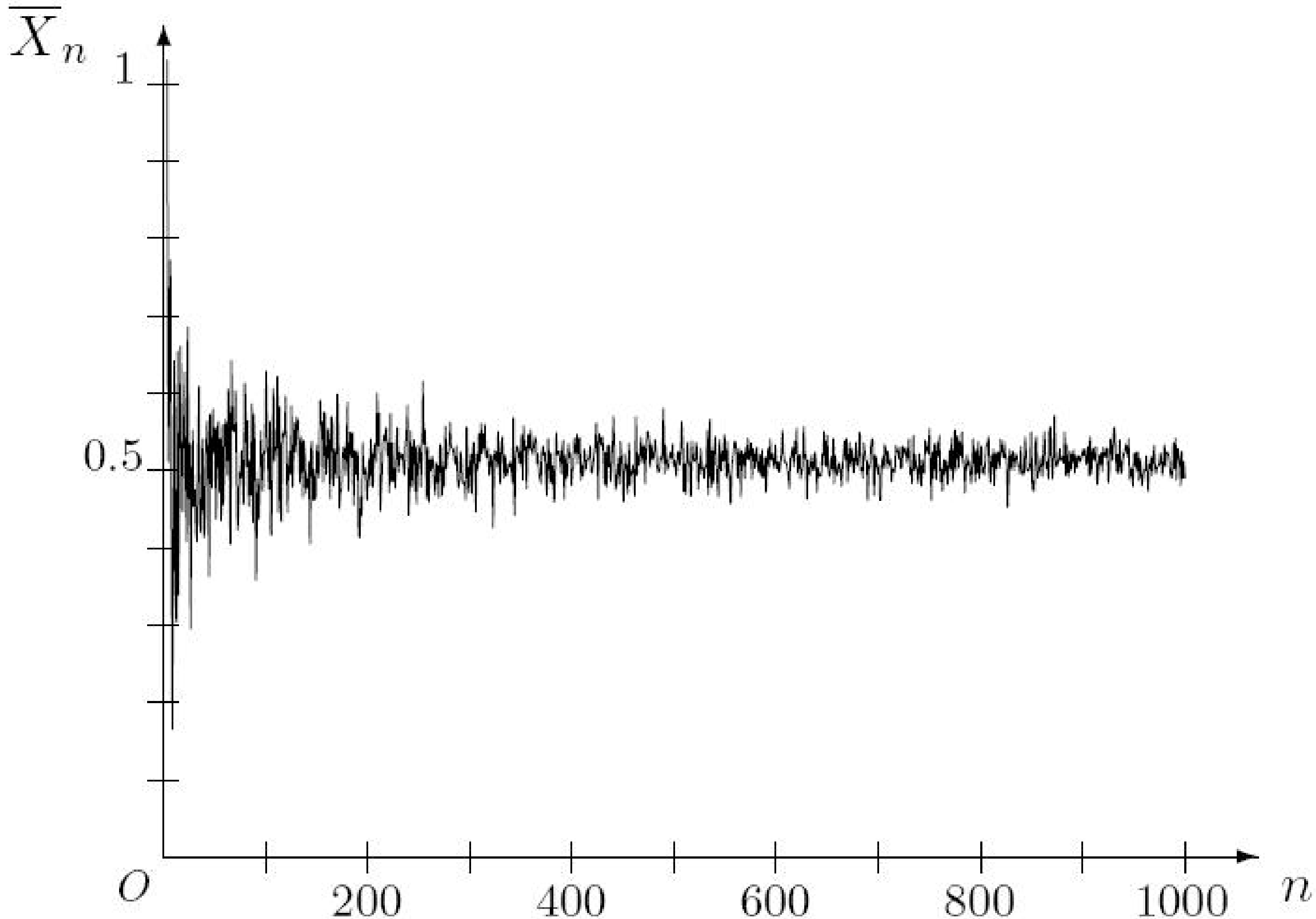


圖1. $\mathcal{B}er(1/2)$分佈$\overline{X}_n$, $1 \le n \le 1{,}000$, 之模擬圖

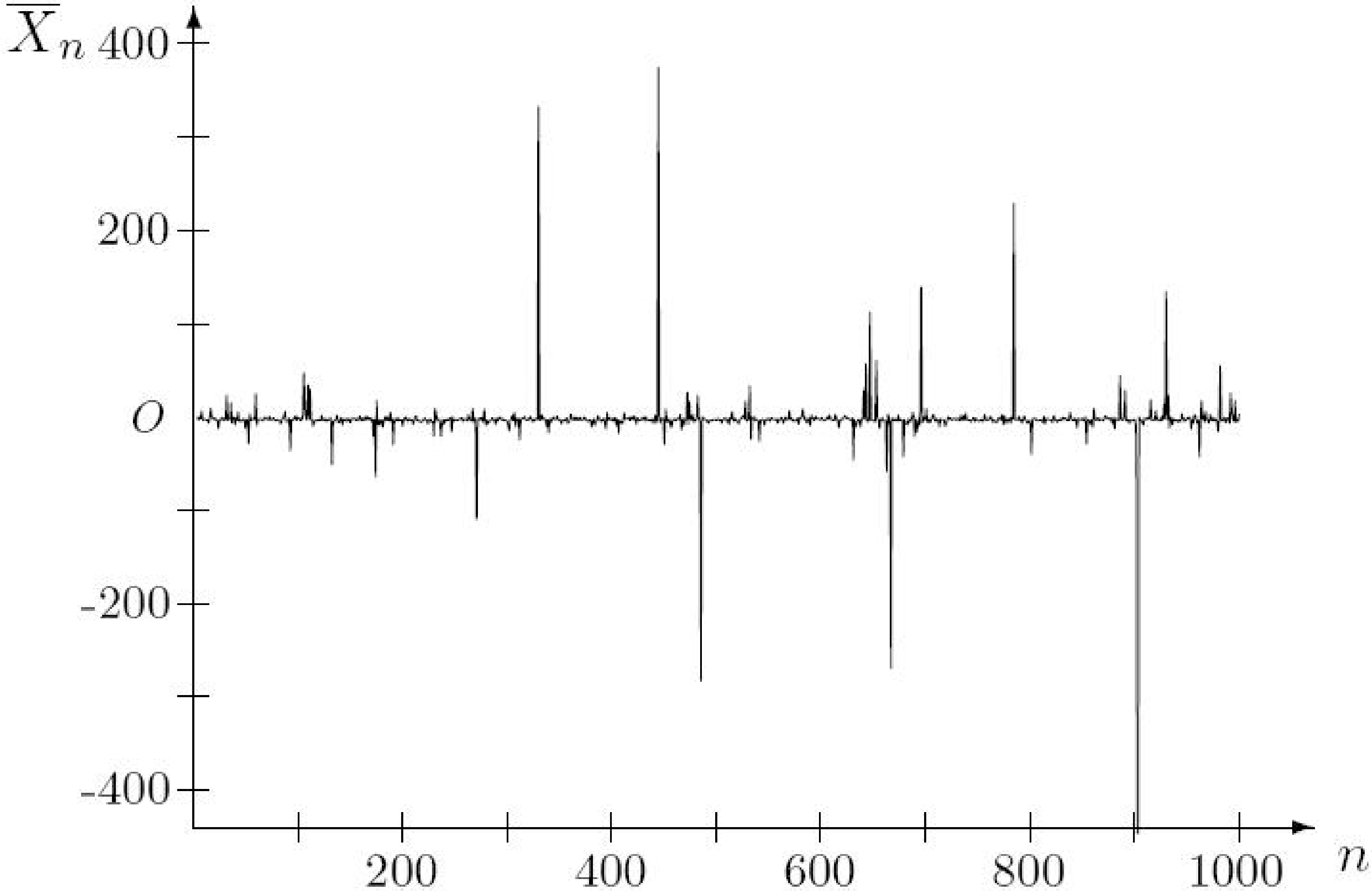


圖 2. $\mathcal{C}(2.5, 1)$ 分佈 $\overline{X}_n$, $1 \leq n \leq 1,000$, 之模擬圖

中央極限定理

- 大數法則指出，n很大時，S_n/n差不多就是p：

  n夠大，S_n/n應有很大的機率在p附近變動。

  問：n很大時，S_n應很接近np？

- n很大時，雖S_n/n大致在p附近，但S_n卻很可能會愈偏離np。

◆對S_n有$B(n,1/2)$分佈，且n為偶數，利用史德林公式(Stirling formula)，得

$$P(S_n=\frac{n}{2})=\binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}},\ n\to\infty,$$

其中符號“~”表 $n\to\infty$ 時，兩側比值趨近至1。對二固定的整數$0\le r\le s$，當n很大時，

$$P(r\le S_n\le s)=\sum_{k=r}^{s}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

也將很小。

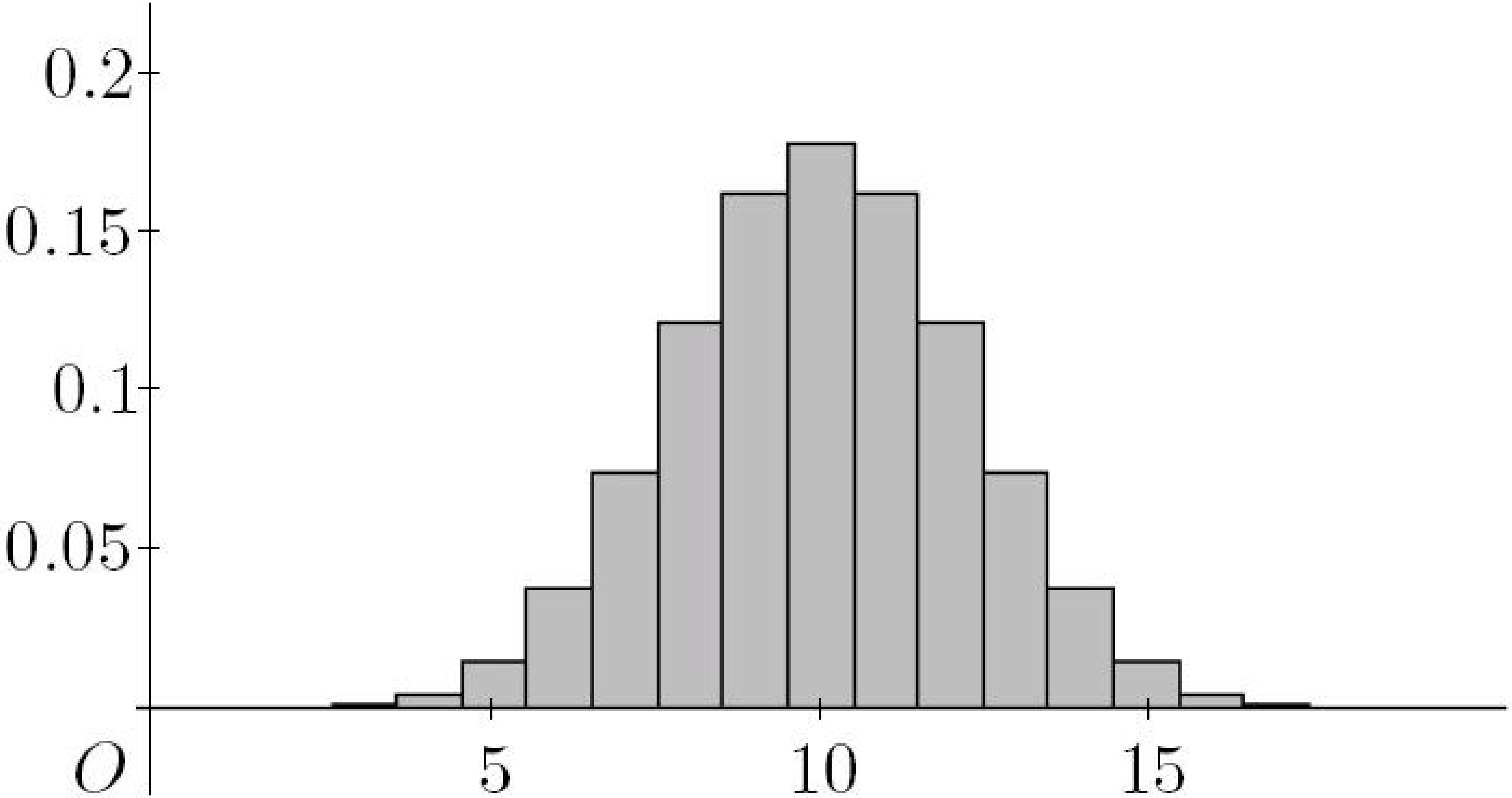


圖3. $\mathcal{B}(20, 0.5)$分佈直方圖

當n為偶數，對每一固定整數k，可得n很大時，

(1) $$P(S_n = \frac{n}{2} + k) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$$ 。

除非在$n/2$附近有夠多的項，否則S_n落在$n/2$附近一區間$[n/2+a, n/2+b]$之機率將很小。即n很大時，

(2) $$P(\frac{n}{2} + a \le S_n \le \frac{n}{2} + b) = \sum_{k=a}^{b} P(S_n = \frac{n}{2} + k) \approx 0$$ 。

且由(1)式，所需項數，應須能與$\sqrt{n}$相匹比。

- 棣美弗(de Moivre, 1667-1754)以適當的a_n, b_n取代(2)式中的a, b得到那些機率值的和，可表示為一個積分，並在1733年發表此結果，即中央極限定理的雛型。
- 拉普拉斯在1812年推廣棣美弗$p = 1/2$的結果至一般的p。
- 19世紀結束後，中央極限定理的重要性，才被完全認識。
- 1901年，里阿普那夫(A. M. Lyapunov, 1857-1918)，給出此定理較一般的敘述，及嚴密的證明。

◆對S_n有$B(n,p)$分佈，拉普拉斯證出，對α<β，$n\to\infty$時，

$$(3)\quad P(np+\alpha\sqrt{np(1-p)}\le S_n\le np+\beta\sqrt{np(1-p)})$$

$$\to\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}\phi(u)du,$$

其中

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(u)du,\ x\in R,$$

而

$$(4)\qquad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ x\in R\ 。$$

◆(4)式定義出一標準常態(以$\mathcal{N}(0,1)$表之)分佈之機率密度函數。圖4給出其圖形，所謂鐘形曲線。圖形最高點發生在$x = 0$，其值為 $\phi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ ，約為0.39894。

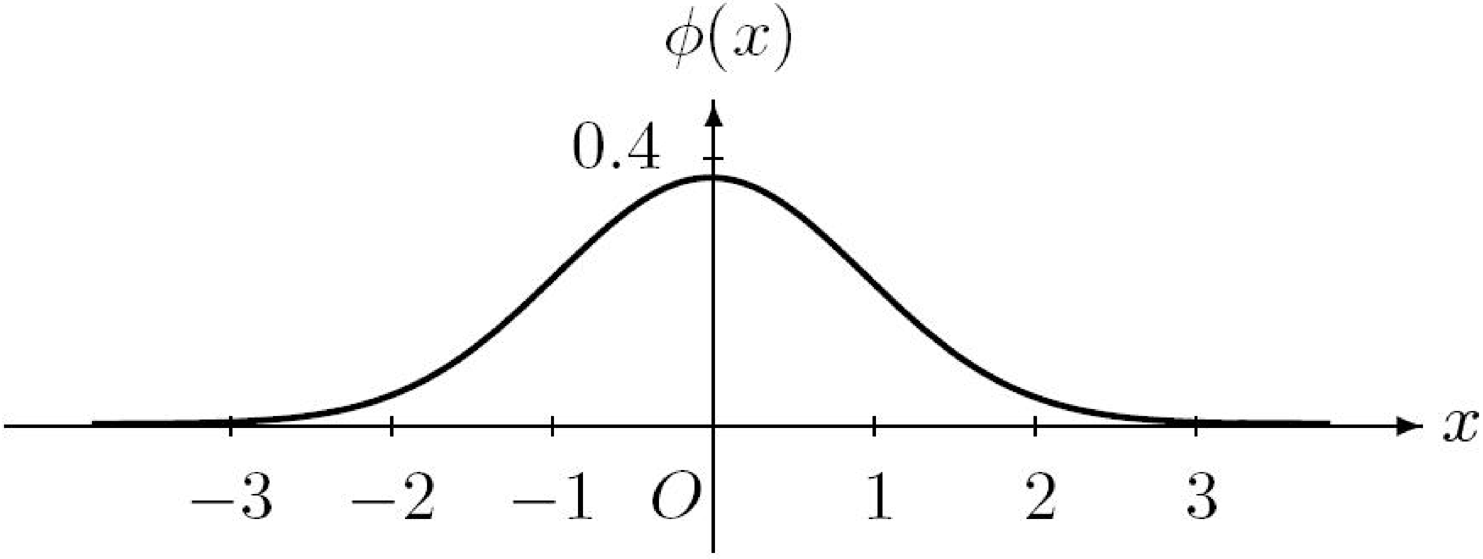


圖4. $\mathcal{N}(0,1)$分佈之機率密度函數圖形

◆(3)式之另一表示法為，當α<β，$n\rightarrow\infty$ 時，

(5) $$P(\alpha\le\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\beta)\rightarrow\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$ 。

二項分佈趨近至常態分佈。

- 對S_n有$B(n,p)$分佈，np，及$\sqrt{np(1-p)}$ 分別為S_n之期望值及標準差。

- S_n的核心np，隨著n之增大，已移至很遠處。
- 將S_n減去期望值np，則$S_n - np$的核心便成為0：有如座標平移。

- 再經改變尺度，單位長由1成為$\sqrt{np(1-p)}$，則S_n的直方圖，從np量起，α個標準差至β個標準差間，那些長方條面積和，可表為 $\overline{X}_n$ 之圖形下與x軸間，介於$x=\alpha$至$x=\beta$間的面積。

- 隨機變數減去期望值，再除以標準差，稱為將其標準化。

- 隨機變數若有二項分佈，則可表為i.i.d.伯努力隨機變數之和。將其標準化後，會趨近至$\mathcal{N}(0,1)$ 分佈。
- 只限伯努力隨機變數之和嗎？

- 中央極限定理說，若有夠多的i.i.d.隨機變數之和，經標準化後，當n很大時，可以$\mathcal{N}(0,1)$分佈做為近似。
- 設對每一$n>1$，$X_1, \cdots, X_n$為iid，且$\mu = E(X_1)$，及$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$皆存在。則對$\alpha < \beta$，

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\alpha \le \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\alpha \le \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\ 。$$

n很大時，

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right|\le c\right)\approx 2\Phi(c)-1,\ c>0,$$

$$P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|\le \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right)\approx 2\Phi(c)-1,\ c>0,$$

$$P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|> \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right)\approx 2(1-\Phi(c)),\ c>0,$$

$$P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|>\varepsilon\right)\approx 2(1-\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma)),\ \varepsilon>0。$$

◆弱大數法則指出，對每一$\varepsilon > 0$，n很大時，$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon)$將很小。究竟多小？

◆中央極限定理給出n很大時，

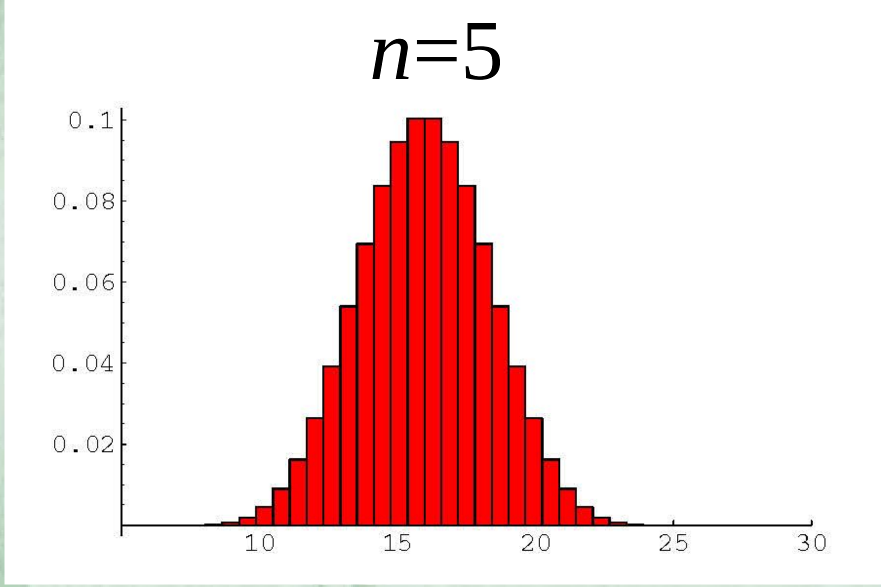
$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \approx 2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma))$$ 。

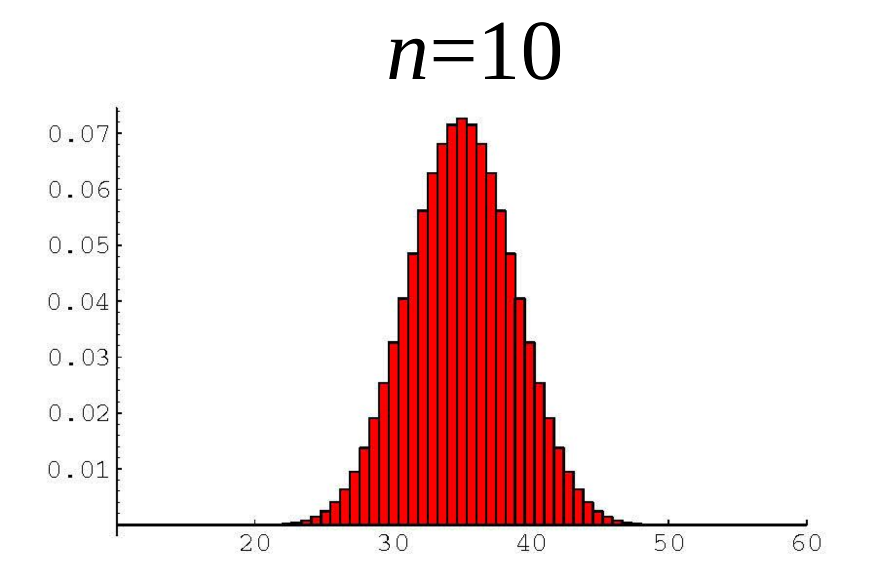
◆不論X_n, n =1, 2, ⋯，之共同分佈為何，都成立。

◆無法保證n很大時，$|\bar{X}_n - \mu|$ 不會超過ε，但只要變異數σ^2存在，則 $P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon)$的大小，便可掌握，即約$2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma)) \to 0$，當$n \to \infty$ 。

- 中央極限定理，有更一般的型式。獨立性及分佈相同的假設皆可放寬。
- 智商、身高，及膽固醇含量等，這些隨機的量，常可視為很多微小的隨機效應累積所造成，因此往往能用常態分佈來描述。
- 19世紀時，奎特雷(L. A. J. Quetelet, 1796-1874)及高爾頓，發現很多生物裡的特徵，其分佈皆符合常態分佈。這是此分佈被稱為常態的主因。
- 也隱含其他分佈不算常態。

投擲骰子5次及10次所得點數和之直方圖

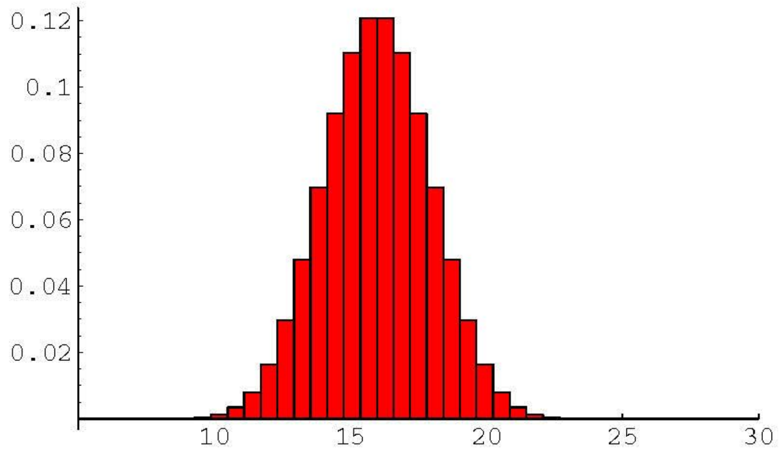




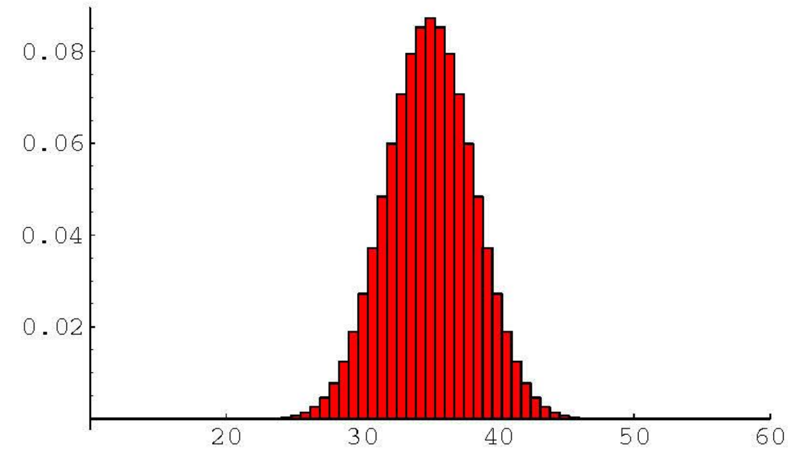
(a) $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$

投擲骰子5次及10次所得點數和之直方圖

n=5



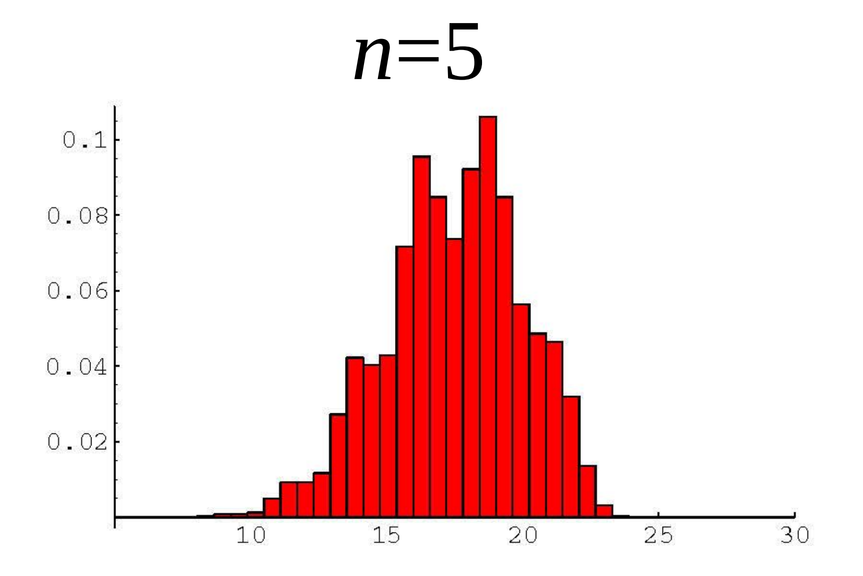
n=10

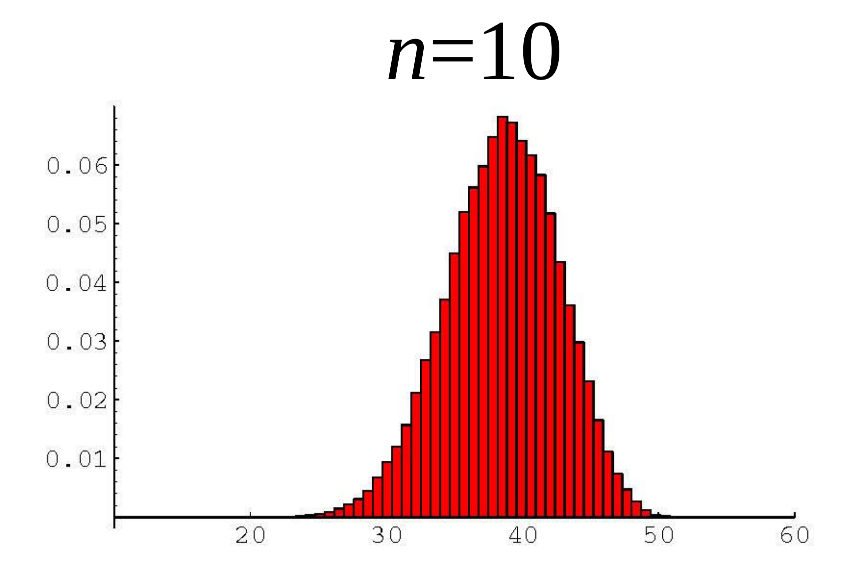


(b) $p_1 = 0.1, p_2 = 0.15, p_3 = 0.25,$

$p_4 = 0.25, p_5 = 0.15, p_6 = 0.1$

投擲骰子5次及10次所得點數和之直方圖





(c) $p_1 = 0.2, p_2 = 0.1, p_3 = 0,$

$p_4 = 0.1, p_5 = 0.4, p_6 = 0.2$

- 在中學裡介紹中央極限定理，大抵僅針對二項分佈，底下為一些講法:
- 在參數是(n,p)的二項分布中，當試驗的次數n足夠大時，成功次數X的機率分布會近似於平均數μ為np，標準差σ為$\sqrt{np(1-p)}$的常態分布。
- 當n足夠大時，二項分配的圖形近似一平滑的鐘形曲線，此時二項分配近似於常態分配。

- 可看出當n=32而p=0.5時，二項分配機率圖是對稱且呈鐘形，接近常態分配。…事實上，對任意0<p<1，由中央極限定理可知：n夠大時，X會接近常態分配。

- $\overline{X}_n$的相對次數直方圖長相非常接近鐘形。

- n夠大，隨機變數$\hat{p}= X/n$近似常態分布，其平均數$\mu= p$，標準差$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ ，…。

- 當樣本數n夠大時，$\hat{p}$ 的分佈會趨近於平均數為p，標準差為 $\sqrt{p(1-p)/n}$ 的常態分佈。

這些都不太正確

- 所謂n足夠大，當然包含n無止盡地增大。
- 對$B(n,p)$分佈，不論p為何，n愈大時，S_n將很可能也是很大。
- 即$n \to \infty$時，S_n機率收斂至∞。
- 又$n \to \infty$時，S_n /n機率收斂至p。
- 因此說，n夠大時， S_n及S_n /n會分別近似那一常態分佈，都非正確。

- 隨著n之增大，$B(n,p)$分佈之直方圖，將愈趨貼近水平座標軸(想想最大高度趨近0)，怎會近似鐘形曲線？
- 至於n很大時，S_n/n的直方圖，將如底部中點為p之一座尖塔，高聳入雲，也絕不會讓人聯想到鐘形曲線或常態分佈。

S_n有$B(n,0.5)$分佈

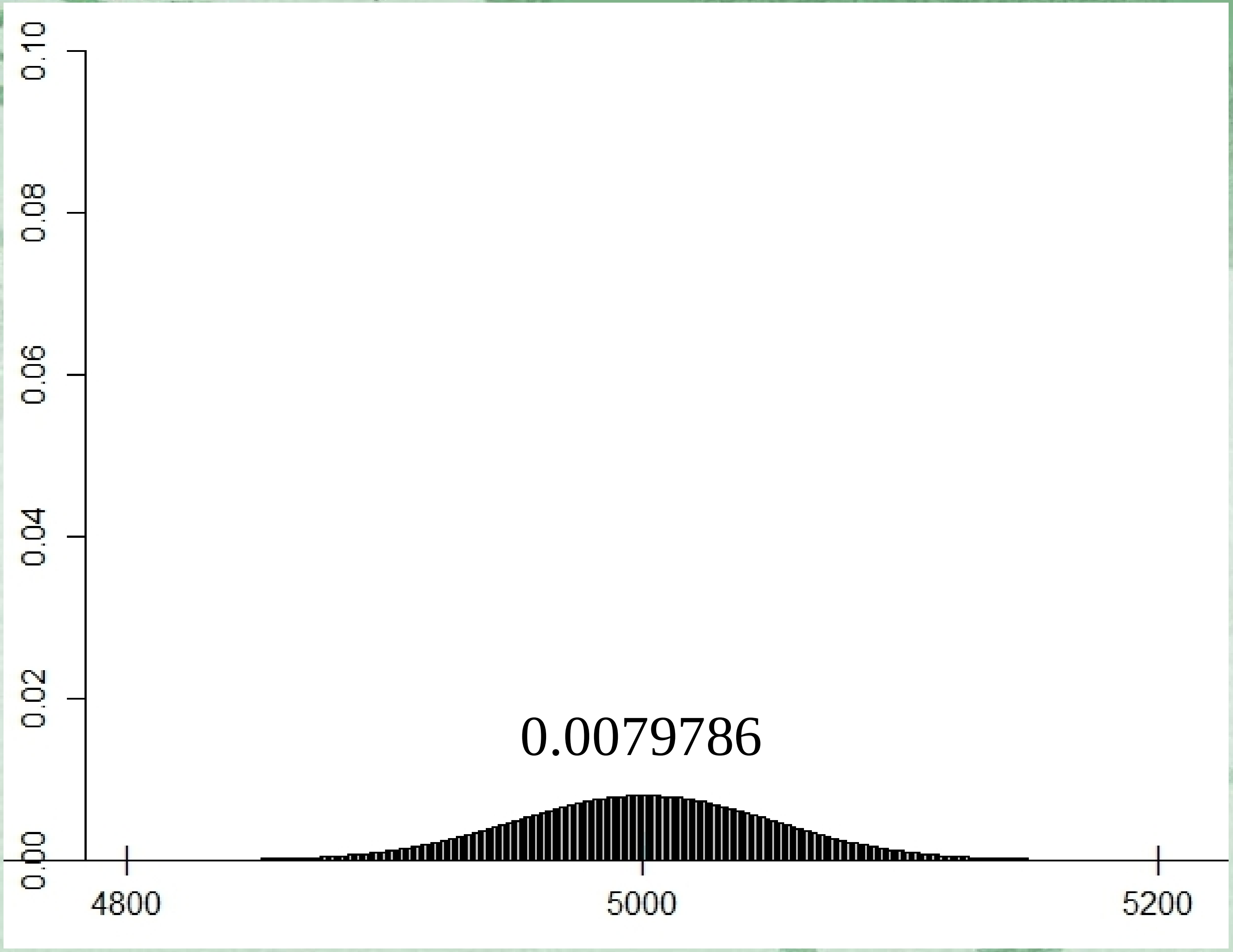


圖7. S_n之直方圖, $n=10{,}000$

S_n有$B(n,0.5)$分佈

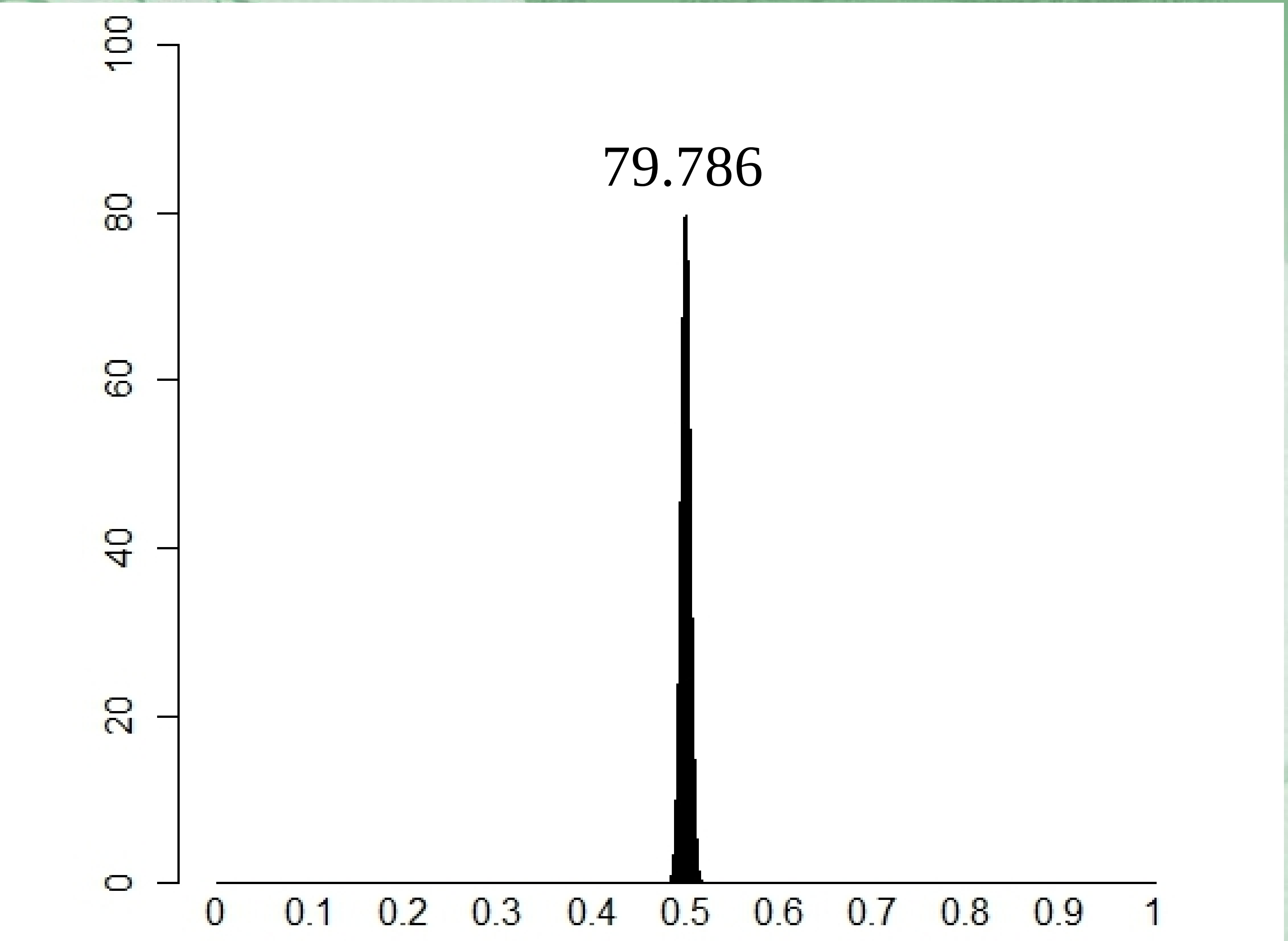


圖8. S_n/n之直方圖, $n = 10{,}000$

近似不能僅靠目測

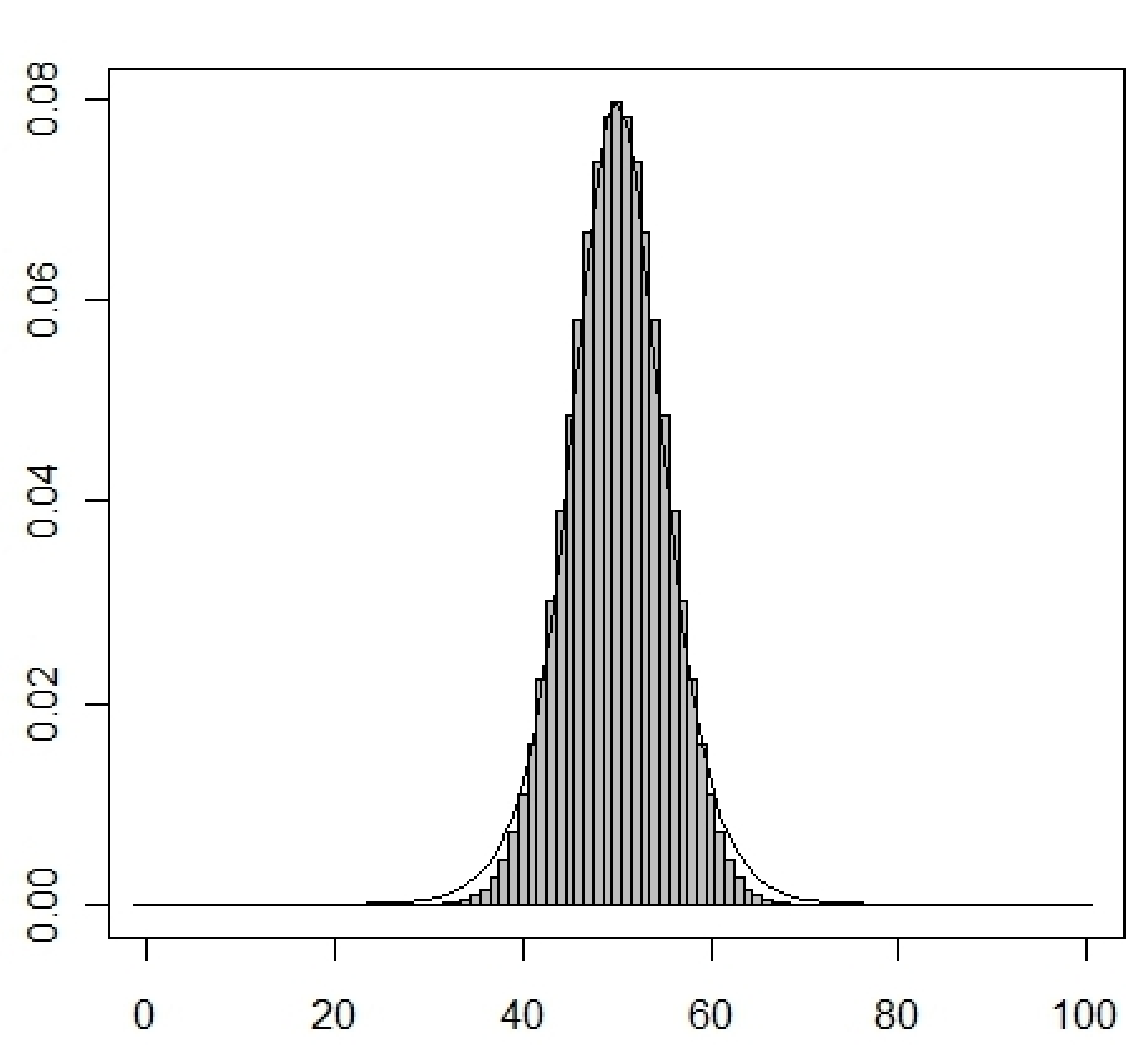


圖9. $B(100,0.5)$, $Logistic(50, 5\sqrt{2\pi}/4)$

$Logistic(\mu,s)$

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-(x-\mu)/s}}{s(1+\mathrm{e}^{-(x-\mu)/s})^2},\ x\in R\ 。$$

- 由於獨尊的名稱中央，與涉及的分佈名之為常態，有人誤以為機率統計裡只有常態分佈。
- 常態分佈雖無所不在，所謂萬物有常，在實務上，仍要謹慎判斷是否適合用來當模型。

◆2011年7月號科學月刊 "Hello Kitty"的數學一文：

$X_0+\cdots+X_{41}$，

$X_1, \cdots, X_n$獨立，

且$X_i \sim Ge((n-i)/n)$，$i = 0,\cdots,41$,

⇨ 根據常態分佈的50-68-95法則，…

◆並非任意獨立隨機變數和，當樣本數夠多，只要經標準化後，便可以常態分佈來近似。

有須滿足的條件。

常態分佈並非那麼無所不在！

- 樣本數n為30以上，中央極限定理便適用？
- 假設X_i’s之共同分佈為$Ber(0.02)$，且n=100。則$X_1+\cdots+X_{100}$有$B(100,0.02)$分佈。而$B(100,0.02)$之分佈可以$P(2)$分佈做很好的近似。
- $P(\lambda)$表參數λ之波松分佈(Poisson distribution)，機率密度函數為

$$f(k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},k=0,1,2,\cdots,$$

- $P(2)$分佈之直方圖，絕對不像常態分佈。

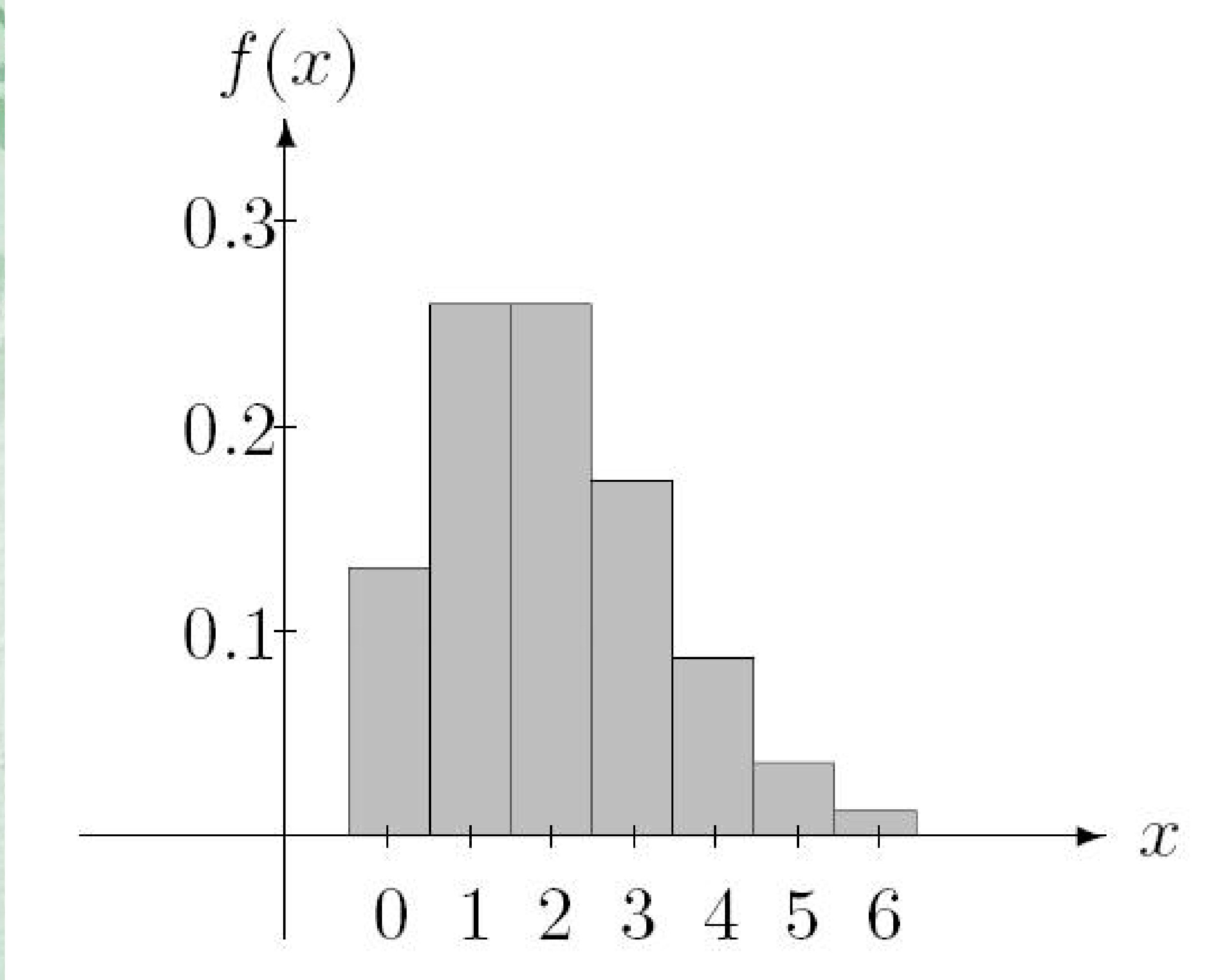


圖11. $P(2)$分佈之機率密度函數圖形

高斯誤差理論

- 重覆做一物理實驗，每次所得值不盡相同。如何估計真實值μ？

- 設n次量測後，得到觀測值$x_1, \cdots, x_n$，則常以

$$\bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

估計μ。令$\hat{\mu}$表μ之一估計值，則$\bar{\mu}$有下述兩特性：

(i) 滿足估計之誤差和$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})$為0之$\hat{\mu}$即為$\bar{\mu}$；

(ii)滿足估計之誤差平方和$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2$最小之$\hat{\mu}$亦為$\bar{\mu}$。

- 由於有此二特性，高斯認為$\bar{\mu}$ 應為μ之一最佳的估計值。
- 但什麼樣的誤差，會使$\bar{\mu}$ 成為一最佳的μ之估計值？
- 看到一現象，思考究竟是什麼因，才造成這樣的果？
- 科學上除了探討由某個因可得到那些果，也常會由看到的某個果，去推測產生的因。統計裡常也如此，此點與數學不同。

◆令$X_1,\cdots,X_n$表n次觀測後所得樣本。假設這些是iid的隨機變數。若令

$$X_i=\mu+Y_i,\ i=1,\cdots,n,$$

μ為觀測的真實值，乃一定值，而Y_i為第i次觀測之誤差，即

$$Y_i=X_i-\mu,\ i=1,\cdots,n。$$

由於$X_1,\cdots,X_n$為i.i.d.，故$Y_1,\cdots,Y_n$亦為i.i.d.。在(i)及(ii)兩條件下，我們想看誤差的分佈會是什麼？

- 令f表$Y_1,\cdots, Y_n$之共同的機率密度函數。得做一些合理的假設，才能決定f。
- 由於測量的特性，很接近的兩個誤差值，可合理的假設其發生之可能性應也很接近。為了簡便，設 $f(x)>0, \forall x\in R$，且f之一階導數存在且連續。
- 這樣還是無法決定f，可找到無限多個f。如

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}, x\in R,$$

其中θ為一常數。

高斯以如下的手法決定f。

首先$Y_1,\cdots,Y_n$之聯合機率密度函數為$f(y_1)\cdots f(y_n)$。

至於觀測到的樣本$x_1,\cdots,x_n$之概似函數(likelihood function)為

$$
\begin{aligned}
L(\mu \mid x_1,\cdots,x_n) &= f(y_1)\cdots f(y_n) \\
&= f(x_1-\mu)\cdots f(x_n-\mu),
\end{aligned}
$$

其中$x_i,\ y_i \in R,\ i=1,\cdots,n$。函數$L$就是將聯合機率密度函數$\prod_{i=1}^{n} f(y_i)$，視為一$\mu$之函數，而將$x_1,\cdots,x_n$固定。此時已不將$L$當做機率密度函數，而是$x_1,\cdots,x_n$給定，且讓$\mu$可以變動。

高斯認為，既然事件

$$X_1=x_1,\cdots, X_n=x_n$$

發生，而 $\bar{\mu}$ 又被認為是μ之最佳估計值。所以當 $\mu=\bar{\mu}$，應使L達到最大值。也就說當 $\mu=\bar{\mu}$ 時，恰會使觀測值$x_1,\cdots,x_n$最易產生。此想法是基於此估計值既是最佳，那就要$x_1,\cdots,x_n$是最可能被觀測到。一百多年後，現代統計學的創始者之一費雪，所提出的最大概似法(method of maximum likelihood)，就是源自高斯的想法。多了此一假設，高斯在1809年，如下導出誤差有常態分佈。

首先L在 $\mu=\bar{\mu}$ 達到極大值，等價於log$L$在 $\mu=\bar{\mu}$達到極大值。因此

$$\frac{d}{d\mu}\log L(\mu \mid x_1,\cdots,x_n)\Big|_{\mu=\bar{\mu}} = 0。$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f'(x_i-\bar{\mu})}{f(x_i-\bar{\mu})} = 0 \ 。$$

所以f亦須滿足上式。先令 $u_i = x_i - \bar{\mu}$ ，再令 $g(u)=\log f(u)$，則上式成為

(1) $$\sum_{i=1}^{n} g'(u_i) = 0。$$

上式並非對所有$u_1,\cdots,u_n$皆須成立，而是對$\forall n\geq 1$，及滿足

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$$

之$u_1,\cdots,u_n$成立即可。

在(1)式中，取$n=2$，及$u_1=u$， $u_2=-u$，得

$$g'(u)+g'(-u)=0, \forall u\in R。$$

即g滿足

(2) $$g'(-u)=-g'(u), \forall u\in R。$$

再於(1)式中，取$n=3$，及$u_1=a+b$， $u_2=-a$，$u_3=-b$，得

$$g'(a+b)+g'(-a)+g'(-b)=0, \forall a, b\in R。$$

利用(2)式，上式成為

(3) $$g'(a+b)=g'(a)+g'(b), \forall a, b\in R。$$

滿足(3)式之連續函數為線性函數，即

$$g'(u) = c_1 u, \forall u \in R,$$

其中c_1為一常數。因此

$$g(u) = \frac{1}{2} c_1 u^2 + c_2, \forall u \in R,$$

其中c_2亦為常數。故

$$f(u) = e^{g(u)} = e^{c_2} e^{c_1 u^2 / 2}, \forall u \in R \text{ 。}$$

c_1必須是負的。令$c_1 = -1/\sigma^2$，其中$\sigma>0$為一常數。由$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$，解出$e^{c_2} = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}$。即得

(4) $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, x \in R。$$

可驗證對上述f，

$$L(\mu \mid x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

的確在$\mu = \bar{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$達到極大值。故(4)式所給的$f$，確實是我們所要的解。

- 在一些不太強的假設下，高斯巧妙地導出量測的誤差有期望值為0的常態分佈，這就是高斯誤差理論。
- 由此亦可知，何以誤差常有常態分佈。

應用1

問：投擲一銅板若干次，正面數出現比率為 50.114%，僅比50%略多，是否不足以推翻此銅板為公正？

解. 結論為何與投擲數 n 有關。

設$X_1,\cdots, X_n$為i.i.d. $Ber(p)$分佈之r.v.'s。$E(X) = p$，$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$。欲檢定

$$H_0：p = 0.5 \text{ ，} H_a：p > 0.5 \text{。}$$

拒絕域為$\{\overline{X}_n > c\}$。由中央極限定理，

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \approx \mathcal{N}(0,1) \text{。}$$

現觀測到 $\overline{X}_n = 0.50114$。

(1) $n = 13{,}000{,}000$。

$$p-\text{值} = P(\overline{X}_n \geq 0.50114 \mid H_0\text{為真})$$
$$\approx P(Z \geq \frac{\sqrt{13{,}000{,}000}(0.50114-0.5)}{\sqrt{0.5\cdot 0.5}})$$
$$\approx P(Z \geq 3605.55\cdot 0.00228)$$
$$\approx P(Z \geq 8.22)$$
$$\approx 1.03\cdot 10^{-15}\text{。}$$

此值微乎其微，故拒絕H_0，即認為銅板並非公正。

(2) $n = 1{,}000{,}000$。

$$
\begin{aligned}
p-\text{值} &= P(\overline{X}_n \ge 0.50114 \mid H_0\text{為真}) \\
&\approx P\left(Z \ge \frac{\sqrt{1{,}000{,}000}(0.50114-0.5)}{\sqrt{0.5\cdot 0.5}}\right) \\
&\approx P(Z \ge 1{,}000\cdot 0.00228) \\
&\approx P(Z \ge 2.28) \\
&\approx 0.0113\text{。}
\end{aligned}
$$

若α>0.0113，則拒絕H_0，否則接受H_0。

(3) $n = 10{,}000$會如何(實際n不可能為10,000，因 $\overline{X}_n$計算至小數第5位值)？

$$
\begin{aligned}
p-\text{值} &= P(\overline{X}_n \ge 0.50114 \mid H_0\text{為真}) \\
&\approx P\left(Z \ge \frac{\sqrt{10{,}000}(0.50114-0.5)}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5}}\right) \\
&\approx P(Z \ge 100 \cdot 0.00228) \\
&\approx P(Z \ge 0.228) \\
&\approx 0.40978\text{。}
\end{aligned}
$$

對大部分的情況($\alpha<0.40978$)，皆會接受H_0。

- 50.114%與50%差異是否夠大，與投擲數 *n* 有關！

  n 愈大，此差異就可能夠大，

  n 較小時，此差異可能不夠大。

- 換種說法，正面數比反面數多30,000是否夠多？

應用2

- 公職人員選舉罷免法第六十九條：

  區域立法委員、直轄市長、縣(市)長選舉結果，得票數最高與次高之候選人得票數差距，…在有效票數千分之三以內時，…聲請…重新計票，…

問：

千分之3的差距很小嗎？

怎樣的差距算小？

- 不能用票數之差來表示：

  有效票數1,000，差100票很多；有效票數1,000,000，則100票，不算什麼。

- 以得票率來表示差距大小也不盡然合理：

  男子100公尺短跑目前世界紀錄為9.58秒，2009年所創。而1968年的世界紀錄為9.95秒，每10年平均進步約0.09秒。若某次比賽，有選手將紀錄推進至9.48秒，雖只快了0.1秒，才約1%，會被認為是一大幅的進步，因發生的機率極低。

- 以發生機率之大小，來反映差距大小較合理。
- 以投擲一公正銅板n次來說明，假設n為偶數。隨著n的增大，愈來愈不容易得正反面數各半。
- 以S_n表投擲n次後所得之正面數。對公正銅板，$E(S_n)=n/2$。但S_n難免有偏差，通常不會剛好是$n/2$。偏差有多大？

◆ S_n的標準差為$\sqrt{n}/2$，隨著n之增大而增大。即n愈大時，S_n散佈的範圍將愈大，範圍以$\sqrt{n}/2$的速度成長。但相對偏差，即偏差/n，愈來愈小。換句話說，所得正面數的比率S_n/n，期望值為1/2，標準差為$1/(2\sqrt{n})$，隨著n之增大而減小。故當n愈大，S_n/n要偏離1/2一固定距離的機率愈小，此即大數法則。大數法則針對的是正面出現率S_n/n，而非正面數S_n！

- 設n=10,000，則$E(S_n)$=5,000，Var(S_n)=50^2，0.003的差距30，相當於0.6個標準差。即投擲一銅板10,000次，若得到正面數5,030，正面出現率比期望值僅超出0.6個標準差，其機率約為0.2709，發生容易，難以據此推斷銅板非公正。

- 當n=1,000,000，$E(S_n)$=500,000，Var(S_n)=500^2，0.003的差距3,000，相當於6個標準差。即投擲一銅板1,000,000次，若得到正面數503,000，正面出現率超出6個標準差。發生的機率，至少到小數第8位都是0。機率這麼小的事件居然發生，當然會令人強懷疑銅板的公正性，即採信出現正面的機率>1/2。

◆結論：

得票率差距究竟大或小，與有效票數多寡有關。有效票數若夠多，千分之3的差距便很大，即差距很顯著，這時落敗的一方，便不該心有不甘。這也是做統計分析時，何以會在意樣本大小，因取樣愈多偏差將愈小。

應用3

美女上錯身

- 上法庭控告對方抄襲。

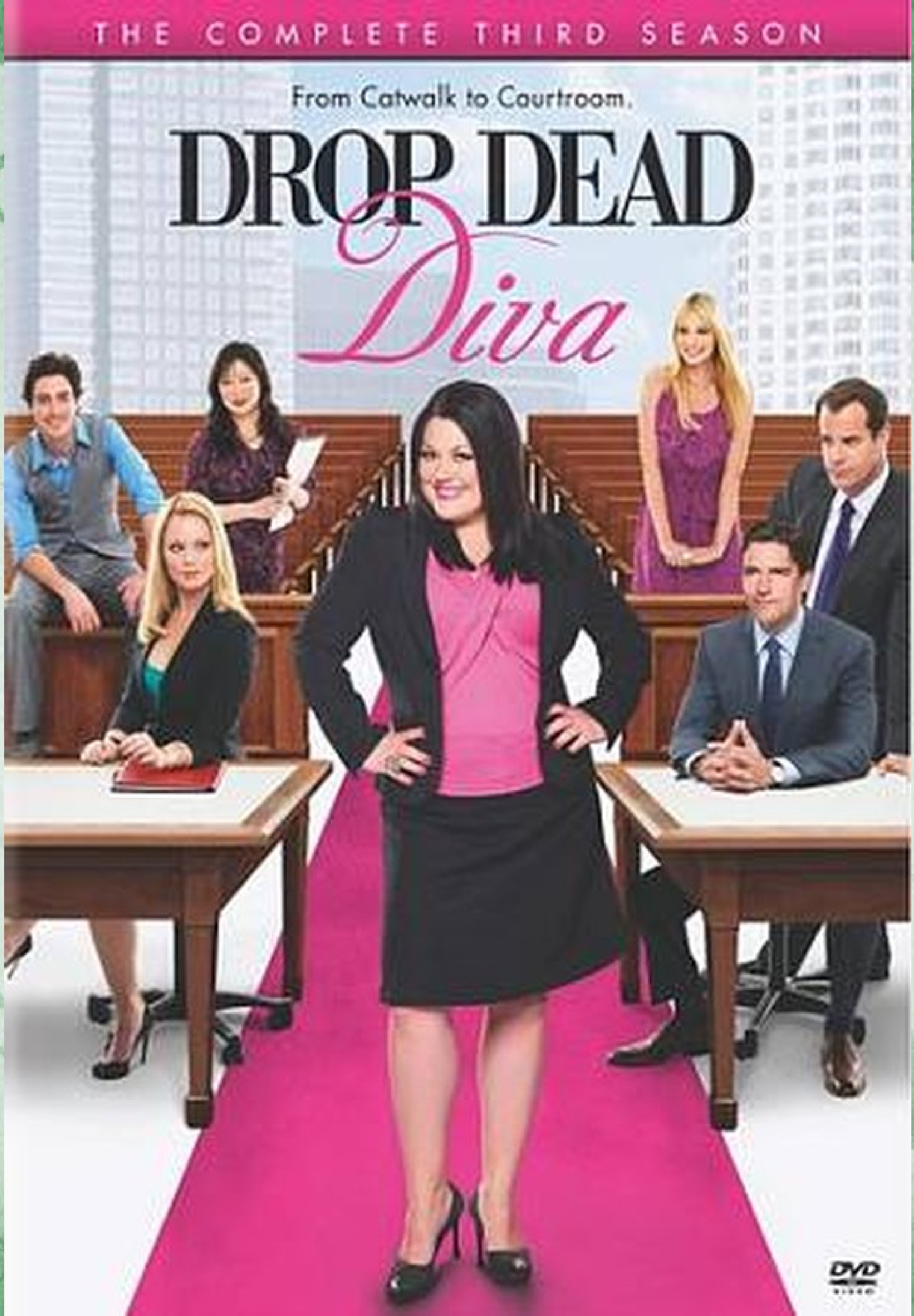
被告律師依反抄襲軟體：

相似度41%，

以佐證未抄襲。

問：

合理嗎？


THE COMPLETE THIRD SEASON
From Catwalk to Courtroom.
DROP DEAD
Diva
DVD

女子整容酷似楊冪難分辨 相似度高達95%

- 41%是否算低，95%是否高，不能由表面上的數字大小來判定。
- 影印出來，若與原件相似度為95%，品質並不算好。
- 相片與本人相似度，即使高達99%，也會有人不滿意。
- 補習班考前猜題，命中率有41%，就很驚人。
- 相似度高或低，應由發生的難易程度，即依發生機率的大小而定。

0, 1數列

0, 1, 1, 1, 0, 0, …，

長度1，全中機率1/2，

長度2，全中機率1/4，

⋮

長度100，

⋮

長度10,000。

- 長度100的0,1數列，依序猜，每次猜對的機率為1/2。則全對的機率為$(1/2)^{100}$，且平均可對50個。
- 以對的個數除以100，當做吻合度。則吻合度50%以上，並不稀奇。
- 對的個數，期望值為50，標準差為5(有參數100及1/2的二項分佈)。

- 吻合度55%(多1個標準差)以上，機率約0.1587。
- 吻合度60%(多2個標準差)以上，機率約0.0228。
- 吻合度65%(多3個標準差)以上，機率約0.0013。
- 吻合度可否達到95%(超過9個標準差)以上？

機率僅約1.1422・10^{-19}！

恐怕沒人會相信是隨機猜。

- 長度10,000，對的個數之期望值為5,000，標準差為50。
- 長度增為100倍，則期望值增為100倍，標準差僅增為10倍。
- 吻合度50.5%(多1個標準差)以上，機率約0.1587。
- 吻合度51%(多2個標準差)以上，機率約0.0228。
- 吻合度51.5%(多3個標準差)以上，機率約0.0013。
- 吻合度55%以上，幾乎是萬萬不可能(超過10個標準差，機率約7.6946・10^{-24})。
- 0,1數列，對同樣的吻合度，還要看數列的長短，才能判定難易程度。愈長便愈難。

英文字母數列

- 將0,1數列，改為26個英文字母數列，且不考慮大小寫。
- 若隨機猜，當數列長度為10,000，猜對個數之期望值約384.615，標準差約19.231。

- 吻合度4.038%(多1個標準差)以上，機率約0.1587，
- 吻合度4.231%(多2個標準差)以上，機率約0.0228，
- 吻合度4.423%(多3個標準差)以上，機率約0.0013。

吻合度有4.4%就很稀奇了。

- 吻合度達41%以上？

天方夜譚！

- 在不同情況下，吻合度的難易，無法一起評比。
- 兩本書如何斷定其相似度？至少與書的長短有關。
- 不能僅由41%比統計裡信賴區間常取的95%低很多，就判定無抄襲之虞。

結語

統計與考古

- 統計裡有資料探勘，資料採礦。即Data Mining。
- 統計乃發掘資料，與考古做類似的事情。

發掘：挖掘、發現、引出。

For Today’s Graduate, Just One Word: Statistics

By STEVE LOHR

MOUNTAIN VIEW, Calif. — At Harvard, Carrie Grimes majored in anthropology(人類學)and archaeology(考古學) and ventured to places like Honduras, where she studied Mayan settlement patterns by mapping where artifacts were found. But she was drawn to what she calls “all the computer and math stuff” that was part of the job.

“People think of field archaeology as Indiana Jones, but much of what you really do is data analysis,” she said.

Now Ms. Grimes does a different kind of digging. She works at Google, where she uses statistical analysis of mounds of data to come up with ways to improve its search engine.

Ms. Grimes is an Internet-age statistician, one of many who are changing the image of the profession as a place for dronish number nerds. They are finding themselves increasingly in demand — and even cool.

The New York Times August 6, 2009

- 郭寶鈞，1931年殷墟第四次挖掘時，與梁思永同時加入中央研究院史語所考古組。曾說：

事實至於遺存，推論敬俟卓識

(只報導事實，其含意則有待高明)。

- 考古這門學問，有物而無言，就看如何解釋使之成為準確的史證。

- 統計如同考古，資料產生後，最重要的是推論：

  如何解讀資料？

- 幾千年前的事，由發掘的墓，如何復原遺蹟？

  仰韶文化、龍山文化真確定了？

- 統計裡一切都是假設，虛無假設，對立假設，看你接受那一假設：

  真相如何，常只有天曉得。

- 與數學中的推論完全不同！

- 在數學裡證明命題的真偽：

  直角三角形兩股平方和等於斜邊平方。

- 除非找到證明錯誤，或反例，否則不必挑戰。
- 統計裡則

  判斷某一假設是否可接受。

  一切都是假設，看接受那一個。

統計推論

- 統計裡，由於隨機的本質，有不同的方法，不同的推論，百家爭鳴，各領風騷。
- 那一鐘較準？先得定義怎樣才是較準？一停止的鐘，每天也有二時刻完全精準。
- 對某一方法，某一推論，只能說在那些條件下最佳。少有

倚天既出，誰與爭鋒

之方法或推論。

為何愛酒不愧天？

- 李白推論法(月下獨酌)：

天若不愛酒，酒星不在天。

地若不愛酒，地應無酒泉。

天地既愛酒，愛酒不愧天。

⋮

◆考試引導教學，學測及指考，究竟考些什麼統計題目？

機率統計考題探討

- 1. 98年學測數學第9題(多選)
  某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比(以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在95%信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為[0.50, 0.58]、[0.08,0.16]。試問下列哪些選項是正確的？

(1) 甲地本次的參訪者中，54%的人聽過該產品

(2) 此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數

(3) 此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於95%

(4) 若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有95%的機會落在區間[0.08,0.16]

(5) 經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的四倍，則在95%信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半(即0.04)

- 大考中心公佈的答案為(1)、(2)

討論

- 以p表甲地全體居民中聽過該產品之比率。
- 選項(3)即問此次調查結果可否

  解讀為 $p \geq 1/2$的機率大於0.95。

- 雖p並非隨機變數，但認為$p \in [0.50, 0.58]$之機率為0.95，可視為對機率主觀的解釋。

  ⇨得$p \geq 0.5$的機率大於0.95之主觀機率。

- 只是不宜考對機率的主觀解釋。

- 例如，考慮如下題目：下列那一隊得下屆世界盃足球賽冠軍之機率最高？

(1)法國隊,

(2)巴西隊,

(3)德國隊,

(4)阿根廷隊,

(5)荷蘭隊。

- 在統計裡，允許各種推論法。
- 即使投擲一銅板，連續得10次正面，都可仍堅持該銅板為公正。
- 由於除了可有不同的主觀機率之原因外，再加上允許對抽樣結果可有不同的解讀，故並不宜有選項(3)。
- 不過，一旦有選項(3)，則便不宜說此選項不正確。

◆2. 99年學測數學第12題(多選)

想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 $\hat{p}$	0.52	0.59
$\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

(1) 全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例

(2) 在95%的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為[0.48,0.56](計算到小數點後第二位,以下四捨五入)

(3) 此次抽樣的女性公民數少於男性公民數

(4) 如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例 $\hat{p}$ 介於0.52與0.59之間

(5) 如果不區分性別, 此次抽樣 $\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 介於0.02與0.04之間

- 大考中心公佈的答案為(2)、(4)

討論

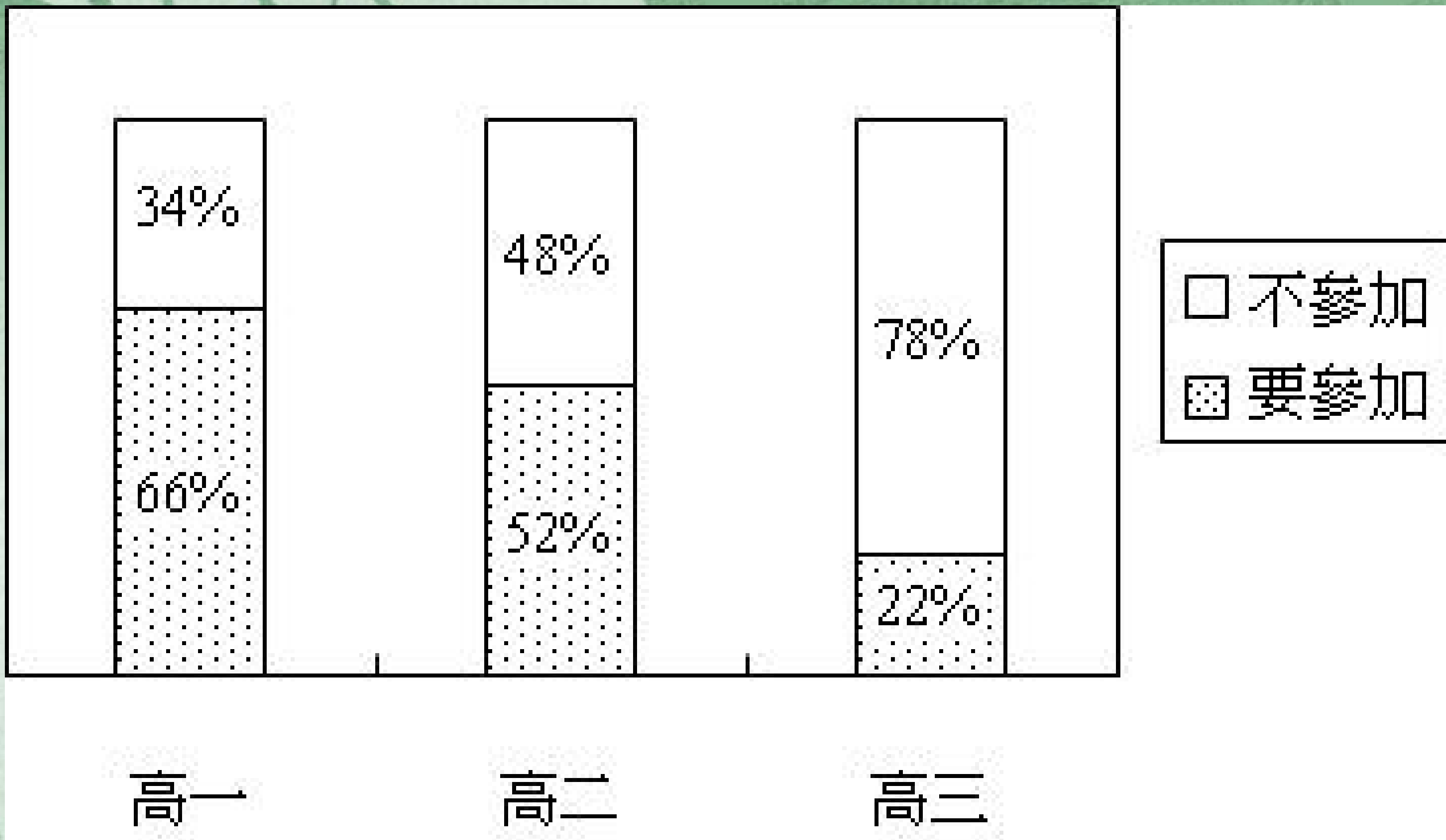
- 調查結果，雖男性贊成比例0.59大於女性贊成比例0.52，但兩者95%信賴區間分別為[0.51,0.67]及[0.48,0.56]，兩區間有重疊。

  ⇨選項(1)不被大考中心視為正確？

- 在統計裡，豈曾要求須依信賴區間來做推論？
- 用點估計0.59 > 0.52做推論不行嗎？
- 即使採信賴區間，非得95%？68%不行嗎？此時二信賴區間各為[0.55,0.63]及[0.50,0.54]便不重疊了。
- 在統計裡，可有各種推論法，且常無那一推論法永遠最佳，只能依不同的標準評比。

◆3. 98年指考數學乙選擇題第6題(多選)

某縣市教育局欲瞭解高中生參加課外活動社團的意願，開學日隨機調查高一、高二、高三學生各1067名，詢問本學期是否要參加課外活動社團。已知該縣市的高一、高二、高三學生人數幾乎一樣多，各年級學生調查結果如下圖：



試問下列選項中的敘述，哪些是正確的？

(1) 學生要參加課外活動社團之比例隨著年級增加而遞減
(2) 由上述資訊可以估算全體學生要參加課外活動社團的比例
(3) 在95%信心水準下，每一個年級學生要參加課外活動社團的比例之信賴區間，都可以由題目中已知的數據算出
(4) 在95%信心水準下，三個年級的調查結果，以高一學生要參加課外活動社團的比例的信賴區間最長
(5) 在95%信心水準下，三個年級的調查結果，以高三學生要參加課外活動社團的比例的信賴區間最短

- 大考中心公佈的答案為(1)、(2)、 (3)、(5)

討論

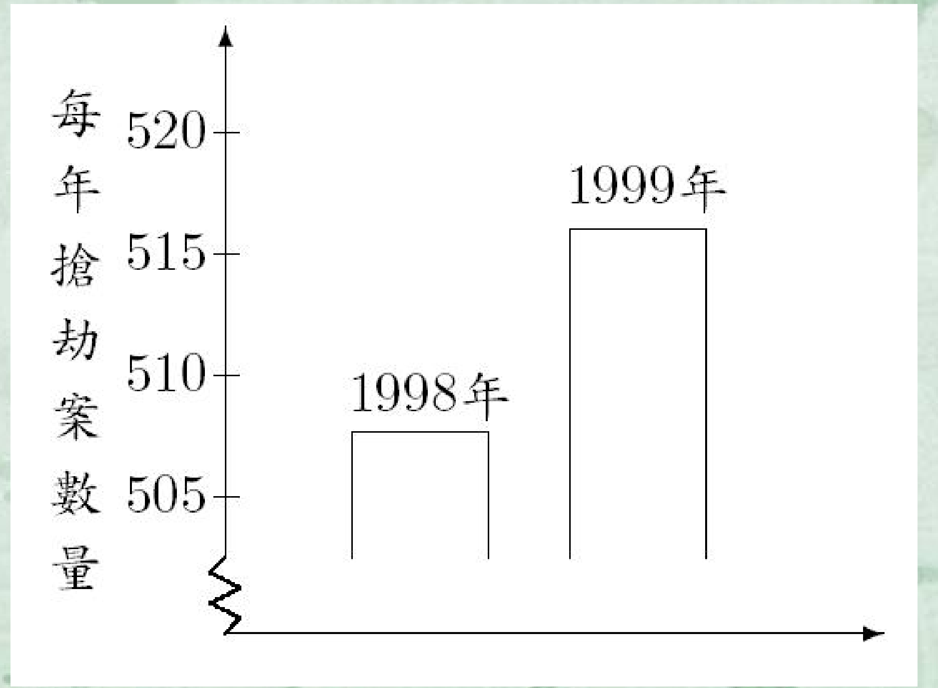
- 如果大考中心認為第2題的選項(1)不對，則何以認為本題選項(1)正確？
- 第2題問可得到那些推論，而本題問那些正確？
- 在統計裡，對同一觀測結果，每人可有不同的推論。
- 但何者正確，卻不能憑主觀，任意推論。選項(1)乃針對母體發問，由僅取部分樣本的結果，如何知母體究竟如何？

- 最後來看PISA(the Programme for International Student Assessment，國際學生能力評量計畫，台灣受測學生包含國中、五專及高中職)2006數學樣本試題M179，這是一道統計題目。

問題：搶劫

電視主播呈現了下圖並報導：

「從圖表顯示,從1998年到1999年搶劫案數量有巨幅的上升」。



你認為這位主播對於上圖的解釋是否合理？請寫出一個理由來支持你的答案

- 滿分

  代號21：不，不合理。指出我們看到的只是整個圖表的其中一小部分。

- 不合理，須顯示整個圖表。
- 我不認為那是合理的詮釋，因為如果顯示全圖的話，便能看到搶劫案的數目只是輕微上升。
- 不合理，因為他只用了圖表上方的小部分。如果看到全圖由0到520的情況，便知道上升幅度不是那麼大。
- 不，那只是因為該圖表讓人覺得數字巨幅上升。看數字增加並不多。

討論

到底搶劫案上升能不能算巨幅，並非只看增加的搶劫案數值之大小，也宜看發生機率之大小。給一情境如下：

假設每年搶劫案之數量X有$B(520,0.977)$分佈。令$n=520$，$p=0.977$。則

$$E(X)=np=508.04,$$
$$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{np(1-p)}\approx 3.418$$ 。

因 np 及 $n(1 - p)$ 皆大於5，由常態近似，得

$$P(X \geq 515) \approx P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{515 - 508.04}{3.418}\right)$$

$$\approx P(Z \geq 2.036) \approx 0.0209$$ 。

- 在統計裡，一件事是否不尋常，乃依發生機率之大小。

- 在上述假設下，因0.0209的機率夠小，所以該主播之解釋尚無不妥。

謝謝各位！